

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

多变量微积分笔记9——极坐标下的二重积分

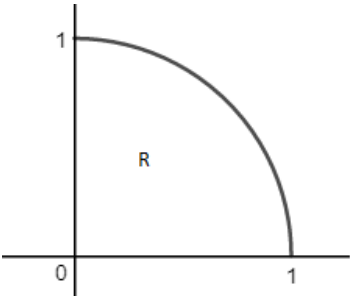
直角坐标是常用的坐标法，但是对于一些特别的问题，在直角坐标系下处理就显得有点笨拙了。这个时候，不妨试试极坐标。它可以使得问题变得出乎意料的简洁，也能让问题直观和清晰起来。

关于极坐标的相关问题可参考《[数学笔记27——极坐标下的面积](#)》

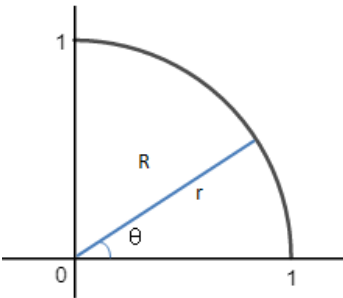
极坐标的积分域

在上一篇文章的“积分边界”一节有这样一个例子： $z = 1 - x^2 - y^2$ ，如果约束 $x^2 + y^2 \leq 1$ 且 $x \geq 0, y \geq 0$ ，那么 z 的二重积分是什么？

R区是1/4圆：



现在我们尝试将其转换为极坐标来计算R区域，这将是半径 r 和夹角 θ 的函数：



在绝大部分情况下，我们会使用 θ 作为外积分， r 作为内积分；同时很容易确定二者的积分域：

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 f(r, \theta) dr d\theta$$

极坐标下的dA

还是使用黎曼和去解释积分，那么在极坐标下如何切割成小矩形？

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

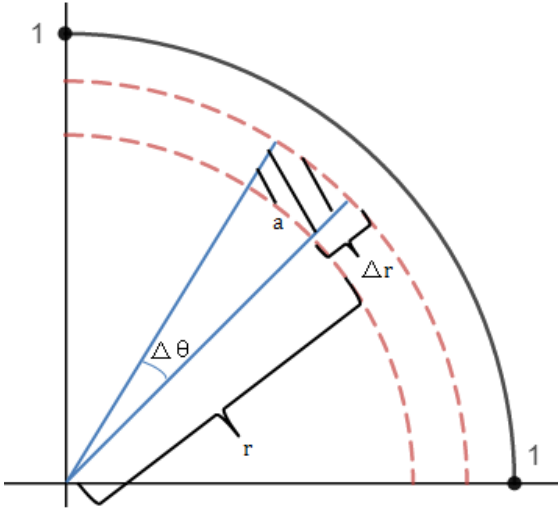
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人



如上图所示，阴影部分就是 ΔA ，这是个近似的矩形，设其宽度为 Δr ，长度近似于弧长：

$$\Delta A \approx a \Delta r = \left(2\pi r \times \frac{\Delta \theta}{2\pi}\right) \Delta r = r \Delta \theta \Delta r$$
$$dA = r d\theta dr$$

这就是在极坐标下的 dA ，它不在简单地等于 $d\theta dr$ ，所以上一节的正确答案应该是：

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 f(r, \theta) r dr d\theta$$

把原函数转换为极坐标后就可以计算积分了：

$$1 - x^2 - y^2 \xrightarrow{\text{极坐标}} f(r, \theta) = 1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1 - r^2$$
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

正态分布函数的积分

在概率论中经常使用正态分布函数，现在尝试求解它的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$$

这是在单变量积分中很难计算的问题，只知道它最后将等于一个常数
I。现在来看一个二重积分：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} I dy \\ &= I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{等价于}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2 \end{aligned}$$

现在，问题变成了计算二重积分。貌似更复杂了，但是如果转换成极坐标，求解就会非常清晰。由于积分域是 $\pm\infty$ ，所以是对全空间的积分，因此可以将dr作为外积分。转换后的极坐标积分如下：

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ -x^2 - y^2 &= -r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = -r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -r^2 \\ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr &= \int_0^{\infty} \left(e^{-r^2} r \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-r^2} r dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

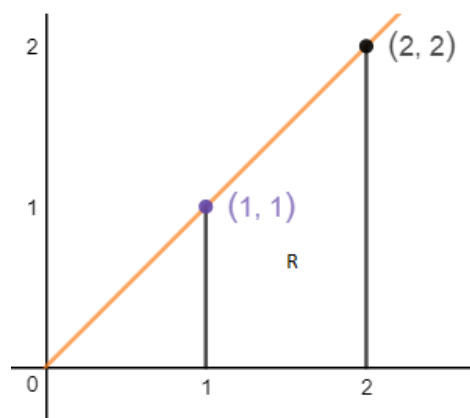
$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

综合示例

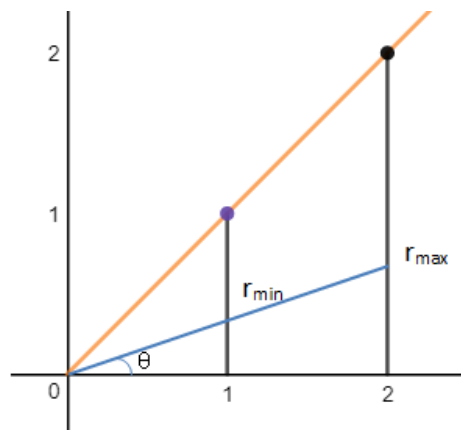
示例1

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy dx = ?$$

R区域：



如果转换为极坐标，很容易判断 θ 的变换区域是 $0 \leq \theta \leq \pi/4$ ，需要计算的是 r 的积分域，如下图所示：



$$\cos\theta = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{2}{r_{\max}} \Rightarrow r_{\min} = \sec\theta, \quad r_{\max} = 2\sec\theta$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \xrightarrow{\text{极坐标}} \left(\frac{1}{r^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{r^3}$$

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r^3} r dr d\theta$$

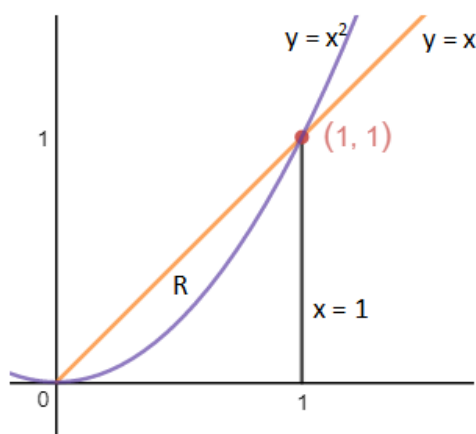
$$\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r^3} r dr = \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r^2} r dr = -\frac{1}{r} \Big|_{\sec\theta}^{2\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{2}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{2} d\theta = \frac{\sin\theta}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

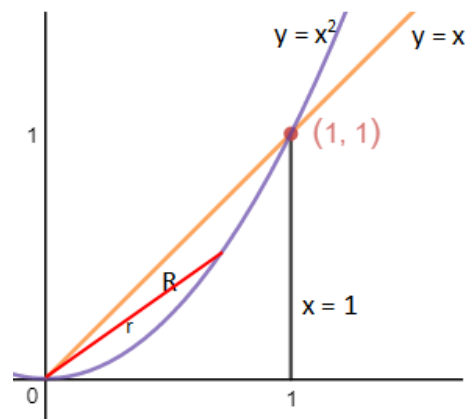
示例2

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x f dy dx = ?$$

R区域：



如果转换为极坐标，很容易判断 θ 的变换区域是 $0 \leq \theta \leq \pi/4$ ， $r_{\min} = 0$



$r_{\max}$ 实际上是 r 关于 θ 的函数, 由于 r 的另一端总在 $y = x^2$ 上, 所以转换为极坐标后:

$$y = x^2 \Rightarrow r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta \Rightarrow r = \tan \theta \sec \theta$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x f dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f r dr d\theta$$

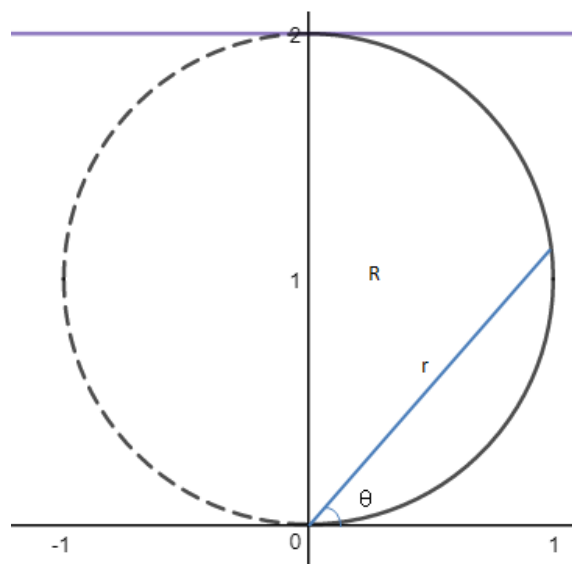
示例3

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f dx dy = ?$$

对于 x 的积分上限:

$$x = \sqrt{2y - y^2} \Rightarrow x^2 = 2y - y^2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

由此可见 R 区域是一个半圆。转换为极坐标后, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r_{\min} = 0$, $r_{\max}$ 是 r 关于 θ 的函数。



$$x^2 = 2y - y^2 \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta = 2r \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow r = 2 \sin \theta$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} f r dr d\theta$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [二重积分](#), [极坐标](#), [正态分布函数的积分](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记8——二重积分](#)
» 下一篇: [多变量微积分笔记10——二重积分的应用](#)

posted on 2018-03-13 18:03 我是8位的 阅读(9380) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

- 编辑推荐:
- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
 - 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
 - ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用

- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes